Logaritmos.

1. Conocimientos previos.

Antes de iniciar el tema se deben de tener los siguientes conocimientos básicos:

- Operaciones básicas con números reales.
- Propiedades de las potencias.
- Ecuaciones.

Sería conveniente realizar un ejercicio de cada uno de los conceptos indicados anteriormente.

2. Logaritmo de un número.

Definición: El logaritmo de un número n en base a se define como el número al que hay que elevar a para obtener el número n.

$$a^y = x \;\Rightarrow\; \log_a x = y$$

Por ejemplo:

$$2^2 = 4 \;\Rightarrow\; \log_2 4 = 2$$

Dos elevado a dos es 4, por lo tanto, el número al que hay que elevar a 2 para obtener 4 es 2 ($\log_2 4 = 2$).

$$2^3 = 8 \;\Rightarrow\; \log_2 8 = 3$$

Dos elevado a 3 es 8, por lo tanto, el número al que hay que elevar a 2 para obtener 8 es 3 ($\log_2 8 = 3$). Otros ejemplos son:

$$2^4 = 16 \;\Rightarrow\; \log_2 16 = 4$$

$$3^2 = 9 \;\Rightarrow\; \log_3 9 = 2$$

$$3^3 = 27 \;\Rightarrow\; \log_3 27 = 3$$

$$10^4 = 10000 \;\Rightarrow\; \log_{10} 10000 = 4$$

El logaritmo es, por tanto, la operación inversa a la potencia, igual que la división es la operación inversa del producto.

Hay que tener en cuenta que:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Esto es muy importante cuando hay decimales en el logaritmo. Por ejemplo:

$$10^{-4} = \frac{1}{10^4} = 0{,}0001 \;\Rightarrow\; \log_{10} 0{,}0001 = -4$$

$$2^{-2} = \frac{1}{2^2} = 0{,}25 \;\Rightarrow\; \log_2 0{,}25 = -2$$

Piense el lector, ayudándose de las propiedades de las potencias, los siguientes logaritmos:

$$\log_2 1 = 0$$

$$\log_3 1 = 0$$

$$\log_5 1 = 0$$

Esto es porque una de las propiedades de las potencias es $a^0 = 1$.

Ejercicios: Calcular los siguientes logaritmos:

1. $\log_2 16 =$
2. $\log_3 81 =$
3. $\log_{10} 0{,}001 =$
4. $\log_2 0{,}5 =$

Es importante recordar que:

1. *Sólo está definido para valores positivos*. Así, por ejemplo, el logaritmo de -2 no existe, independientemente de la base. $\log_2 -2 =$ No existe.
2. El logaritmo de 0 no existe, independientemente de la base. $\log_2 0 =$ No existe.
3. El resultado de un logaritmo puede ser cualquier número. Esto se expresa diciendo que la imagen de la función logaritmo está dada por $Im\ f(x) = (-\infty, \infty)$.

Definición: Los logaritmos en base 10 reciben el nombre de **logaritmos decimales**. Se suelen representar poniendo el logaritmo sin la base:

$$\log x = \log_{10} x$$

Ejercicios: Calcular los siguientes logaritmos:

1. $\log 10000 =$
2. $\log 100 =$
3. $\log 0{,}001 =$
4. $\log 0{,}01 =$
5. $\log -0{,}01 =$

Al igual que $\pi = 3{,}14159...$ es un número importante dentro de las matemáticas, existe otro número muy importante, el número e, cuyo valor es $e = 2{,}71828182845904523536...$

Definición: Los logaritmos en base e reciben el nombre de **logaritmos neperianos**. Se suelen representar poniendo el símbolo $\ln$:

$$\ln x = \log_e x$$

2.1. Propiedades de los logaritmos.

Los logaritmos tienen la propiedad de convertir las multiplicaciones en sumas, las divisiones en restas, las potencias en multiplicaciones y la raíces en divisiones.

Propiedad:

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

Por ejemplo:

$$\log_2(4 \cdot 16) = \log_2 4 + \log_2 16 = 2 + 4 = 6$$

Propiedad:

$$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

Por ejemplo:

$$\log_2 \left(\frac{4}{16}\right) = \log_2 4 - \log_2 16 = 2 - 4 = -2$$

Propiedad:

$$\log_a(x^y) = y \log_a x$$

Por ejemplo:

$$\log_2 4^2 = 2 \log_2 4 = 2 \cdot 2 = 4$$

Propiedad:

$$\log_a(\sqrt[y]{x}) = \frac{1}{y} \log_a x$$

Por ejemplo:

$$\log_2 \sqrt[3]{4} = \frac{1}{3} \log_2 4 = \frac{2}{3}$$

Propiedad:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Esta propiedad es muy interesante para poder calcular el logaritmo en una base, partiendo de otra base distinta. Por ejemplo, se sabe que el $\log_3 9 = 2$ y $\log_3 27 = 3$ el $\log_9 27$ sería:

$$\log_9 27 = \frac{\log_3 27}{\log_3 9} = \frac{3}{2}$$

A veces aparecen expresiones en las que habrá que usar varias de las propiedades:

$$\log \frac{x \cdot y^2}{\sqrt[3]{z}} = \log x + 2\log y - \frac{1}{3}\log z$$

Ejercicios:

1. Comprobar las siguientes operaciones con logaritmos. Usar las propiedades de los logaritmos vistas en este apartado:
   a) $\log_2(16 \cdot 32) = 9$
   b) $\log_3(81 \cdot 27) = 7$
   c) $\log(0{,}001^2) = -6$
   d) $\log x \cdot y \cdot z = \log x + \log y + \log z$
   e) $\log \frac{x \cdot y \cdot z}{a \cdot b} = \log x + \log y + \log z - \log a - \log b$
   f) $\log \frac{x \cdot y \cdot z}{x^2 \cdot y^3} = -\log x - 2\log y + \log z$
2. Sabiendo que $\log_2 4 = 2$ y que $\log_2 8 = 3$, ¿Por qué el $\log_4 8$ vale $\frac{3}{2}$?

3. Ecuaciones logarítmicas.

Una ecuación logarítmica es aquella en la que aparecen logaritmos conteniendo incógnitas. Por ejemplo:

$$\log(x+2) + \log 2 = -\log 3 + \log 3x$$

Cuidado, por que:

$$x + \log 2 = \log 3$$

No es una ecuación logarítmica, ya que, los logaritmos no contienen incógnitas.

Para resolver estas ecuaciones habrá que aplicar las propiedades de los logaritmos ***en sentido inverso*** *para, al final, obtener una igualdad entre dos logaritmos.*

Por ejemplo, se desea resolver:

$$\log(x+2) + \log 2 = -\log 3 + \log 3x$$

Se aplican las propiedades de los logaritmos en sentido inverso, por ejemplo:

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y \;\Rightarrow\; \log_a x + \log_a y = \log_a(x \cdot y)$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y \;\Rightarrow\; \log_a x - \log_a y = \log_a\left(\frac{x}{y}\right)$$

Aplicado a este caso:

$$\underbrace{\log(x+2) + \log 2}_{\log[(x+2)\cdot 2]} = \underbrace{-\log 3 + \log 3x}_{\log(\frac{3x}{3})} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \log[(x+2)\cdot 2] = \log(\frac{3x}{3})$$

Cuando se obtiene la igualdad entre logaritmos hay que igualar los argumentos de los logaritmos y resolver la ecuación resultante.

Si $\log[(x+2)\cdot 2] = \log(\frac{3x}{3})$ evidentemente se deberá cumplir que:

$$(x+2)\cdot 2 = \frac{3x}{3}$$

Resolviendo:

$$2x + 4 = x \;\Rightarrow\; x = 4$$

Todas las soluciones se deben comprobar siempre, ya que, el logaritmo de un número negarivo no existe.

Otro ejemplo, se va a resolver la siguiente ecuación:

$$\log(2x-2) + \log 2 = 2\log x$$

En este caso habrá que recordar la siguiente propiedad de los logaritmos:

$$\log_a(x^y) = y\log_a x \;\Rightarrow\; y\log_a x = \log_a(x^y)$$

Aplicando las propiedades de los logaritmos en sentido inverso a la ecuación que se desea resolver:

$$\underbrace{\log(2x-2) + \log 2}_{\log[(2x-2)\cdot 2]} = \underbrace{2\log x}_{\log x^2} \;\Rightarrow\; \log[(2x-2)\cdot 2] = \log x^2$$

Como $\log[(2x-2)\cdot 2] = \log x^2$ evidentemente:

$$(2x-2)\cdot 2 = x^2$$

Resolviendo:

$$(2x-2)\cdot 2 = x^2 \;\Rightarrow\; 4x - 4 = x^2 \;\Rightarrow\; 0 = x^2 - 4x + 4 \;\Rightarrow\; x = 2$$

Otra situación, que se suele dar, es que los logaritmos se encuentren en bases distintas. *Todos los logaritmos deben estar en la misma base para poder ser operados*. Para evitar este inconveniente habrá que usar la siguiente propiedad:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Por ejemplo:

$$\log_2(x-1) + \log 3 = \frac{\log 3x}{\log 2}$$

En este caso el $\log_2(x-1)$ es el único que tiene una base diferente. Aplicando las propiedades de los logaritmos:

$$\underbrace{\log_2(x-1)}_{\frac{\log(x-1)}{\log 2}} + \log 3 = \frac{\log 3x}{\log 2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\log(x-1)}{\log 2} + \log 3 = \frac{\log 3x}{\log 2} \Rightarrow \frac{\log(x-1)}{\log 2} = \frac{\log 3x}{\log 2} - \log 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\log(x-1)}{\log 2} = \frac{\log 3x}{\log 2} - \log 3 \Rightarrow \log(x-1) = \log 3x - \log 2 \cdot \log 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log(x-1) = \log 3x - \log 3^{\log 2} \Rightarrow \log(x-1) = \log \frac{3x}{3^{\log 2}} \Rightarrow x - 1 = \frac{3x}{3^{\log 2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{1 - 3^{1-\log 2}}$$

Ejercicios: Resolver las siguientes ecuaciones:

1. $\log x = \log 3 - \log 2$
2. $\log \frac{x}{2} = \log 18 - \log x$
3. $\log\left(\frac{3\,x}{5}\right) - \log 2 = \log 7$
4. $\log(x) - \log(x^2) = -\log(6)$

Sol. 1. $x = 3/2$, 2. x=6, 3. $x = 70/3$, 4. $x = 6$

---

4. Ecuaciones exponenciales.

Empecemos recordando las propiedades de las potencias:

$$a^m \cdot a^n = a^{n+m} \Rightarrow a^{n+m} = a^m \cdot a^n$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \Rightarrow a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n} \Rightarrow a^{m \cdot n} = (a^m)^n$$

Una ecuación exponencial será aquella donde la incógnita aparece en el exponente de alguna potencia. Por ejemplo:

$$2^x + 4^{x+1} = \frac{3^x}{3^{1-x}}$$

Para resolver una ecuación exponencial se seguirán los siguientes pasos:

❶ *Se aplican las propiedades de las potencias hasta conseguir una igualdad entre dos potencias.*

Se va a resolver la ecuación:

$$2^x \cdot 4^{x+1} = \frac{3^x}{3^{1-x}}$$

Aplicando las propiedades de las potencias:

$$2^x \cdot \underbrace{4^{x+1}}_{(2^2)^{x+1}} = \underbrace{\frac{3^x}{3^{1-x}}}_{3^{x-(1-x)}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^x \cdot (2^2)^{x+1} = 3^{x-(1-x)} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2^x \cdot 2^{2x+2} = 3^{2x-1} \Rightarrow 2^{x+2x+2} = 3^{2x-1} \Rightarrow 2^{3x+2} = 3^{2x-1}$$

❷ *Una vez que ya se ha conseguido la igualdad entre las potencias, se toman logaritmos en ambos lados de la igualdad y se resuelve la ecuación resultante.*

$$2^{3x+2} = 3^{2x-1} \Rightarrow \log 2^{3x+2} = \log 3^{2x-1}$$

Ahora se aplican las propiedades de los logaritmos para resolver la ecuación:

$$\log 2^{3x+2} = \log 3^{2x-1} \Rightarrow (3x+2)\log 2 = (2x+1)\log 3 \Rightarrow x = \frac{\log 3 - 2\log 2}{3\log 2 - 2\log 3}$$

Hay ecuaciones en las que habrá que descomponer algún número en factores para poder operarlas. Por ejemplo:

$$2^x = 16$$

En este caso $16 = 2^4$, por lo que:

$$2^x = 16 \Rightarrow 2^x = 2^4$$

Por lo tanto:

$$2^x = 16 \Rightarrow 2^x = 2^4 \Rightarrow \log 2^x = \log 2^4 \Rightarrow x\log 2 = 4\log 2 \Rightarrow x = 4$$

Ejercicios: Resolver las siguientes ecuaciones:

1. $2^x = 2^4$
2. $2^x \cdot 2^2 = 2^3$
3. $\sqrt{7^x} = \frac{1}{49}$
4. $3^x + 3^{x+2} = 39$

Sol.: 1. $x = 4$, 2. $x = 1$, 3. $x = -4$, 4. $x = 1{,}24$
